MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 3:

1. Dokažte užitím definice limity posloupnosti aspoň jednu z limit (a důkaz podrobně napište):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ (zkuste pak i důkaz pomocí věty o limitě sevřené posloupnosti);

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (zkuste pak i důkaz pomocí věty o limitě sevřené posloupnosti);

2. Dokažte, že platí (důkaz opět sepište podrobně):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Když jsme na cvičení dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ pro $a \in (1,\infty)$, lze už odtud snadno ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ pro $a \in (-1,1)$.

nebo

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \;\; (a \in R)$.

nebo

c) Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. (Modifikace věty o četnících pro limitu ∞.)

A odtud opět lze snadno spočítat $\lim\limits_{n\to\infty} n(2-\sin n)$ a nebo $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + \cos n)$.

A „dobrovolně“ můžete promyslet a třeba ukázat na příštím cvičení:

3. Zkuste užitím Bernoulliho nerovnosti, kterou jsme dokázali na cvičení, ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (1,\infty)$.

A odtud můžete už snadno ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i pro $a \in (0,1)$.

nebo

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.